Programma del corso di Teoria della Misura (CAM1) del 2020/2021

1. Cardinalit`a. Concetti generali sulla cardinalita`a. Insiemi di cardinalit`a minore, minore o uguale, uguale. Propriet`a generali. Insiemi numerabili e cardinalit`a del numerabile come la piu´ piccola cardinalit`a infinita. Teorema di Cantor-Bernstein. Cardinalit`a del continuo. Esempi.

2. Teoria generale della misura. Algebre e σ-algebre. Funzioni additive e σ-additive di insieme. Misure, misure finite e σ-finite, misure complete. Spazi misurabili e spazi di misura. Limite superiore e limite inferiore di insiemi, e relazione con la misura. Classi monotone e teorema di estensione di Halmos. Misure esterne, estensione a una σ-algebra di funzioni σ-additive su un'algebra, teorema di Carath´eodory. Misure di Borel e di Radon.Misura di Lebesgue in R e in R^N . Insiemi boreliani e insiemi Lebesgue-misurabili. Invarianza per traslazione e per rotazione. Cubi diadici e aperti visti come unione di cubi diadici. Insieme di Cantor (a livello di esercizi). Propriet`a di regolarit`a delle misure di Radon

3. Funzioni misurabili. Funzioni misurabili e funzioni di Borel. Caratterizzazioni delle funzioni misurabili a valori reali o a valori reali estesi. Relazione tra misurabilit`a e continuit`a. Lo spazio delle funzioni misurabili `e chiuso rispetto a somma, prodotto, massimo, minimo, sup e inf numerabili, massimo e minimo limite. Funzioni semplici. Ogni funzione misurabile nonnegativa `e limite crescente di funzioni semplici. Convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura, e relazioni tra di loro. Teorema di Lusin.

4. Integrazione. Integrale di funzioni semplici nonnegative. Integrale di funzioni misurabili nonnegative. Integrali di funzioni misurabili. Funzioni integrabili e sommabili. Le funzioni sommabili sono finite quasi ovunque. Principali propriet`a dell'integrale: linearit`a, integrale del modulo e modulo dell'integrale, crescenza dell'integrale rispetto alla funzione integranda, integrali di funzioni coincidenti quasi ovunque, una funzione misurabile non- negativa ha integrale 0 se e solo se `e nulla quasi ovunque. Assoluta continuit`a dell'integrale. Teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale: Teorema di Beppo Levi, Lemma di Fatou, Teorema della convergenza dominata, e conseguenze. Continuit`a e derivata della funzione integrale, dipendente da un parametro. Esempi.

5.Spazi L^p.Spazi L^p per$1 \leq p < \infty$eper$p = \infty$.Loro completezza.Teoremadi Riesz-Fischer. Disuguaglianze di Holder e Minkowski e conseguenze. Relazione tra norma L^p e norma L^∞ (senza dimostrazione). La convergenza in L^p implica la convergenza in misura. Separabilit`a degli spazi $L^p$ e densit`a delle funzioni continue a supporto compatto in L^p quando $p < \infty$.

6. Misure prodotto. σ-algebra prodotto. Misure prodotto. Misure prodotto e σ-algebre prodotto in R^n . Teoremi di Tonelli e di Fubini.

7. Funzioni assolutamente continue e a variazione limitata. Le funzioni monotone sono misurabili. Le funzioni monotone hanno al massimo un insieme numerabile di 1 punti di discontinuit`a. Una funzione monotona `e derivabile quasi ovunque (dimostrazione

facoltativa). Variazione totale di funzioni a valori reali e funzioni a variazione limitata. Principali propriet`a della variazione totale e delle funzioni a variazione limitata. Le funzioni a variazione limitata costituiscono uno spazio vettoriale e sono esattamente le funzioni differenza di due funzioni crescenti. Funzioni assolutamente continue. Le funzioni assolutamente continue sono a variazione limitata, ma non vale il viceversa. Le funzioni assolutamente continue costituiscono uno spazio vettoriale. Relazione tra funzioni tamente continue e funzioni integrali di funzioni L !. Una funzione assolutamente continua con derivata nulla quasi ovunque `e costante (senza dimostrazione). Teorema fondamentale e formula fondamentale del calcolo integrale per funzioni assolutamente continue e versione corrispondente per funzioni a variazione limitata.

Testo Consigliato

Piermarco Cannarsa, Teresa D'Aprile, Introduzione alla teoria della misura e all'analisi funzionale, Springer 2008.

Programma del corso di Teoria della Misura (CAM1) del 2020/2021

Cardinalit`a. Teoria generale della misura . Funzioni misurabili. Integrazione. Spazi LpMisure prodotto. Funzioni assolutamente continue e a variazione limitata

1. Cardinalit`a. Concetti generali sulla cardinalita`a. Insiemi di cardinalit`a minore, minore o uguale, uguale. Propriet`a generali. Insiemi numerabili e cardinalit`a del numerabile come la piu I' piccola cardinalit`a infinita. Teorema di Cantor-Bernstein. Cardinalit`a del continuo. Esempi.

2. Teoria generale della misura. Algebre e σ-algebre. Funzioni additive e σ-additive di insieme. Misure, misure finite e σ-finite, misure complete. Spazi misurabili e spazi di misura. Limite superiore e limite inferiore di insiemi, e relazione con la misura. Classi monotone e teorema di estensione di Halmos. Misure esterne, estensione a una σ-algebra di funzioni σ-additive su un sigmaalgebra, teorema di Carath I'eodory. Misure di Borel e di Radon.Misura di Lebesgue in R e in RN . Insiemi boreliani e insiemi Lebesgue-misurabili. Invarianza per traslazione e per rotazione. Cubi diadici e aperti visti come unione di cubi diadici. Insieme di Cantor (a livello di esercizi). Propriet`a di regolarit`a delle misure di Radon

3. Funzioni misurabili. Funzioni misurabili e funzioni di Borel. Caratterizzazioni delle funzioni misurabili a valori reali o a valori reali estesi. Relazione tra misurabilit`a e continuit`a. Lo spazio delle funzioni misurabili `e chiuso rispetto a somma, prodotto, massimo, minimo, sup e inf numerabili, massimo e minimo limite. Funzioni semplici. Ogni funzione misurabile nonnegativa `e limite crescente di funzioni semplici. Convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura, e relazioni tra di loro. Teorema di Lusin.

4. Integrazione. Integrale di funzioni semplici nonnegative. Integrale di funzioni misurabili nonnegative. Integrali di funzioni misurabili. Funzioni integrabili e sommabili. Le funzioni sommabili sono finite quasi ovunque. Principali propriet`a dellintegrale: linearit`a, integrale del modulo e modulo dellintegrale, crescenza dell integrale rispetto alla funzione integranda, integrali di funzioni coincidenti quasi ovunque, una funzione misurabile non- negativa ha integrale 0 se e solo se `e nulla quasi ovunque. Assoluta continuit`a dellintegrale. Teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale: Teorema di Beppo Levi, Lemma di Fatou, Teorema della convergenza dominata, e conseguenze. Continuit`a e derivata della funzione integrale, dipendente da un parametro. Esempi.

5.Spazi Lp.Spazi Lp .Loro completezza.Teoremadi Riesz-Fischer. Disuguaglianze di Holder e Minkowski e conseguenze. Relazione tra norma Lp e norma L⍰⍰ (senza dimostrazione). La convergenza in Lp implica la convergenza in misura. Separabilit`a degli spazi Lp e densit`a delle funzioni continue a supporto compatto in Lp quando p .1

6. Misure prodotto. σ-algebra prodotto. Misure prodotto. Misure prodotto e σ-algebre n prodotto in R . Teoremi di Tonelli e di Fubini.

7. Funzioni assolutamente continue e a variazione limitata. Le funzioni monotone sono misurabili. Le funzioni monotone hanno al massimo un insieme numerabile di 1 punti di discontinuit`a. Una funzione monotona `e derivabile quasi ovunque (dimostrazione facoltativa). Variazione totale di funzioni a valori reali e funzioni a variazione limitata. Principali propriet`a della variazione totale e delle funzioni a variazione limitata. Le funzioni a variazione limitata costituiscono uno spazio vettoriale e sono esattamente le funzioni differenza di due funzioni crescenti. Funzioni assolutamente continue. Le funzioni assolutamente continue sono a variazione limitata, ma non vale il viceversa. Le funzioni assolutamente continue costituiscono uno spazio vettoriale. Relazione tra funzioni tamente continue e funzioni integrali di funzioni L !. Una funzione assolutamente continua con derivata nulla quasi ovunque `e costante (senza dimostrazione). Teorema fondamentale e formula fondamentale del calcolo integrale per funzioni assolutamente continue e versione corrispondente per funzioni a variazione limitata.

Testo Consigliato

Piermarco Cannarsa, Teresa DAprile, Introduzione alla teoria della misura e all analisi funzionale, Springer 2008.